Développement : Formule des compléments

Analyse & Probabilités

Référence : [AMA] Amar É., Matheron É., *Analyse complexe*, Cassini, 2003, p249.
Pour les leçons :
- 235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse.
- 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
- 239 : Fonctions définies par une intégrales dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
- 244 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.
- 245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

On note $\{0 < \mathrm{Re}(z) < 1\} := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$.
Soit Γ la *fonction Gamma d'*Euler définie sur $\{\mathrm{Re}(z) > 1\} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ par :

$$\forall z \in \{\mathrm{Re}(s) > 1\} \quad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

Γ est définie et holomorphe sur cet ensemble (lemme à mettre dans le plan avant le développement).
Le but de ce développement est de montrer la **formule des compléments** : pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, on a :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Lemme 1.

Pour tout $\alpha \in]0;1[$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

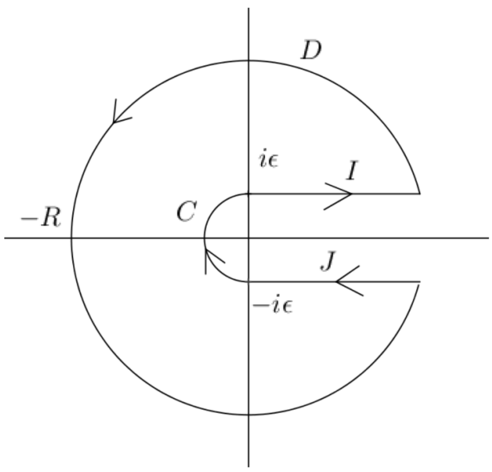
Preuve : Soit $\alpha \in]0;1[$. On pose $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+t)}$.
I_α est l'intégrale d'une fonction mesurable positive, donc elle existe.
Ensuite :
$\longrightarrow u : t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha(1+t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;
$\longrightarrow u(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha < 1$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge (intégrale de Riemann). Donc u est intégrable sur $]0;1]$;
$\longrightarrow u(t) \underset{t\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$, avec $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha+1}}$ qui converge (intégrale de Riemann, $\alpha+1 > 1$). Donc u est intégrable sur $[1;+\infty[$.
Ainsi, u est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc $I_\alpha < +\infty$.
Soient $\Omega := \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ et $f : \Omega\backslash\{-1\} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \Omega\backslash\{-1\} \quad f(z) = \frac{1}{z^\alpha(1+z)},$$

où, si $z \in \Omega$, $z^\alpha := |z|^\alpha e^{2\alpha\theta}$, si $z = |z|e^{i\theta}$ ($\theta \in]0;2\pi[$).
f est holomorphe sur $\Omega\backslash\{-1\}$, et possède un pôle simple en -1, avec :

$$\mathrm{Res}(f,-1) = \frac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\pi\alpha}.$$

Soient $\varepsilon \in]0;1[$ et $R > 1$, et soit $\gamma_{\varepsilon,R}$ le chemin fermé (i.e. lacet) ci-dessous.



Le théorème des résidus fournit :

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}. \tag{1}$$

Mais on a aussi :

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\mathrm{d}z &= \int_I f(z)\mathrm{d}z + \int_J f(z)\mathrm{d}z + \int_C f(z)\mathrm{d}z + \int_D f(z)\mathrm{d}z \\ &:= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.\end{aligned}$$

[1] Si $t > 0$, $(t+i\varepsilon)^{1-\alpha} = |t+i\varepsilon|^{1-\alpha} e^{i(1-\alpha)\theta_{\varepsilon,t}}$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} f(i\varepsilon+t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} \frac{\mathrm{d}t}{(t+i\varepsilon)^\alpha(1+t+i\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Appliquons le théorème de convergence dominée.
$\longrightarrow$ Pour $t > 0$, $(t+i\varepsilon)^\alpha = |t+i\varepsilon|^\alpha e^{i\alpha\theta_{\varepsilon,t}} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} t^\alpha$.
$\longrightarrow$ Pour $t > 0$, $\left|\dfrac{1}{(t+i\varepsilon)^\alpha(1+t+i\varepsilon)}\right| = \dfrac{1}{(t^2+\varepsilon^2)^{\alpha/2}((1+t)^2+\varepsilon^2)^{1/2}} \leqslant \dfrac{1}{t^\alpha(1+t)}$. Donc :

$$\mathbb{1}_{\left[0,\sqrt{R^2-\varepsilon^2}\right]}(t)\left|\frac{1}{(t+i\varepsilon)^\alpha(1+t+i\varepsilon)}\right| \leqslant \mathbb{1}_{[0,R]}(t)f(t),$$

ce qui achève la domination. Le théorème de convergence dominée fournit donc :

$$I_1 \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_0^R f(t)\mathrm{d}t \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+t)}.$$

[2] De même, pour I_2 (en tenant compte du sens d'orientation) :

$$I_2 \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\int_0^R e^{2i\pi(1-\alpha)}f(t)\mathrm{d}t \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} -e^{-2i\pi\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+t)}.$$

[3] On a :

$$\begin{aligned} |I_3| &= \left|\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\varepsilon e^{i\theta})i\varepsilon e^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right| \\ &\leqslant \varepsilon\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\varepsilon^\alpha|1+\varepsilon e^{i\theta}|} \\ &\leqslant \varepsilon^{1-\alpha}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-\varepsilon} \\ &\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

[4] Posons $\theta_{\varepsilon,R} = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$. On a :

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{\theta_{\varepsilon,R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon,R}} f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\theta_{\varepsilon,R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon,R}} \frac{iRe^{i\theta}}{R^\alpha e^{i\alpha\theta}(1+Re^{i\theta})}\mathrm{d}\theta \\ &= iR^{1-\alpha}\int_{\theta_{\varepsilon,R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon,R}}\frac{e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}}\mathrm{d}\theta \\ &\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} iR^{1-\alpha}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}}\mathrm{d}\theta, \end{aligned}$$

par convergence dominée (appliquée à la fonction $(\theta,\varepsilon)\longmapsto \dfrac{e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}}\mathbb{1}_{[\theta_{\varepsilon,R},2\pi-\theta_{\varepsilon,R}]}(\theta)$ sur $[0,2\pi]$.
De plus :

$$\left|iR^{1-\alpha}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant R^{1-\alpha}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-R} \underset{R\to+\infty}{\sim} \frac{2\pi}{R^\alpha} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En faisant tendre ε vers 0, puis R vers $+\infty$ dans (1), on obtient :

$$(1-e^{-2i\pi\alpha})\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+t)} = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+t)} &= \frac{2i\pi e^{-i\pi\alpha}}{1-e^{-2i\pi\alpha}} \\ &= \frac{2i\pi e^{-i\pi\alpha}}{e^{-i\pi\alpha}(e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha})} \\ &= \frac{2i\pi}{2i\sin(\pi\alpha)} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}, \end{aligned}$$

grâce à une formule d'Euler. Cela achève la preuve. □

Théorème 2. ***Formule des compléments.***

Pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $0<\mathrm{Re}(z)<1$, on a :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

<u>PREUVE :</u> Montrons la formule pour $z \in]0;1[$ (on concluera par principe des zéros isolés).
Soit $\alpha \in]0;1[$. On applique le théorème de FUBINI-TONELLI (fonctions positives) pour écrire :

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(1-\alpha) &= \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} t^{-\alpha}e^{-t}\mathrm{d}t\right)\\ &= \int_U \left(\frac{t}{s}\right)^\alpha \frac{e^{-(t+s)}}{t}\mathrm{d}t\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

où $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$.
Soit $\varphi : (t,s) \longmapsto \left(s+t, \frac{t}{s}\right)$. Alors :
$\longrightarrow$ φ est continue, bijective, d'inverse $\varphi^{-1} : (u,v) \longmapsto \left(\frac{uv}{1+v}, \frac{u}{1+v}\right)$;
$\longrightarrow$ φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U car leurs fonctions coordonnées le sont (fractions rationnelles dont les dénominateurs ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}_+^*$).
Donc φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. De plus, pour tout $(u,v) \in U$ (avec $\varphi(t,s) = (u,v)$ pour un certain $(t,s) \in U$) :

$$\begin{aligned}|\mathrm{Jac}\varphi^{-1}(u,v)| &= \begin{vmatrix} \frac{v}{1+v} & \frac{u(1+v)-uv}{(1+v)^2} \\ \frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2}\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \\ \frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2}\end{vmatrix}\\ &= -\frac{uv}{(1+v)^3} - \frac{u}{(1+v)^3}\\ &= -\frac{u}{(1+v)^2}\\ &= -\frac{t}{v(1+v)}.\end{aligned}$$

Par le théorème de changement de variables :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \int_U \left(\frac{t}{s}\right)^\alpha \frac{e^{-(t+s)}}{t}\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\ &= \int_U v^\alpha e^{-u}\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{v(1+v)}\\ &= \int_U \frac{\mathrm{d}v}{v^{1-\alpha}(1+v)}.\end{aligned}$$

D'après le lemme précédent, comme $1-\alpha \in]0;1[$ $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi(1-\alpha))} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$.
Enfin, $z \longmapsto \Gamma(z)\Gamma(1-z) - \frac{1}{\sin(\pi z)}$ est holomorphe sur $\{0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$ par somme de fonctions holomorphes, et s'annule sur $]0;1[$. D'après le principe des zéros isolés, cette fonction est nulle sur $\{0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$, ce qui achève la preuve. $\square$